



# Development of innovative training solutions in the field of functional evaluation aimed at updating of the



MODUŁ BIOMECHANIKA:

PODSTAWY BIOMECHANIKI W ZAKRESIE UKŁADU  
NARZĄDU RUCHU

Jednostka dydaktyczna A: RUCH



## Spis treści

1.	2	
2.	3	
2.1.	Kinematyka	3
2.2.	Kinetyka	3
2.3.	Podstawowe pojęcia	4
2.3.1	Wielkości skalarne a wielkości wektorowe	4
2.3.2.	System współrzędnych	6
3.	8	
3.1	Podstawowe pojęcia ruchów liniowych w jednym wymiarze	9
3.2	Podstawowe pojęcia w zakresie ruchów liniowych w więcej niż jednym wymiarze [5]	11
4.	11	
5.	13	
6.	17	



## 1. Cele

---

- Poznanie podstaw w zakresie wykonywania ruchów (kinematyka) oraz występujących różnic między nimi a także czynników wywołujących ruch (kinetyka).
- Opisanie podstawowych pojęć w zakresie ruchów liniowych: położenie, przemieszczanie, prędkość i przyspieszenie.
- Zdefiniowanie podstawowych pojęć w zakresie ruchów okrężnych: kąt, prędkość kątowna i przyspieszenie kątowe.
- Poznanie podstaw ruchu człowieka: płaszczyzny ruchu i kąty Eulera.

## 2. Podstawy ruchu: Kinematyka I kinetyka

---

Badanie ruchu istot żywych z wykorzystaniem mechaniki jako nauki odbywa się w ramach działu: biomechanika.

### 2.1. Kinematyka

Część mechaniki, która analizuje ruch ciał (poruszanie się po linii prostej lub skręcanie) bez uwzględnienia sił, które je wywołują, nazywa się **kinematyką**. Kinematyka opisuje ruch ciała poprzez różne zmienne:

- Jego pozycje i trajektorie (gdzie znajduje się ciało w danym momencie?)
- Jego prędkość (Jak szybko ciało się porusza?)
- Jego przyspieszenie (Jak zmienia się prędkość ruchu?)

Przykłady zmiennych kinematycznych związanych z ruchem to: pozycja, przemieszczanie / trajektoria, czas, kąt / zakres ruchu, prędkość i przyspieszenie.

Podsumowując:

Kinematyka odpowiada na pytanie: jak porusza się ciało.

### 2.2. Kinetyka

Część mechaniki badająca przyczyny ruchu ciał (sił) nazywa się **kinetyką**\*. Kinetyka opisuje siły, które działają na ciało w celu wywołania ruchu.

Przykładami zmiennych kinetycznych związanych z ruchem są wszelkiego rodzaju siły (tarcie, reakcja gruntu, grawitacja itp.), praca, pęd, moment obrotowy, energia, moc i opór.

Podsumowując:

Kinetyka odpowiada na pytanie: dlaczego ciało się porusza.

W większości badań w zakresie biomechaniki przyjmuje się, że analizowane ciało jest sztywne, a wszelkie deformacje kształtu można zignorować. Dlatego też układ kostny jest uważany za ciało sztywne, którego ruch opiera się na zasadach mechaniki ciała sztywnego. To założenie umożliwia wykonywanie złożonych obliczeń matematycznych i modelowych bez strat w zakresie dokładności i precyzji [1].

\* Kinetyka i dynamika są często używane zamiennie.

Jako część szkolenia teoretycznego zalecamy obejrzenie filmu opisującego różnice dotyczące kinematyki i kinetyki. Film możesz obejrzeć korzystając z linku:

<https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/week-1-kinematics/week-1-introduction/>

*Materiał do którego prowadzi hiperłącze jest publiczny i dostępny do przeglądania online. Został*

## 2.3. Podstawowe pojęcia

### 2.3.1 Wielkości skalarne a wielkości wektorowe

Wymienione wcześniej zmienne mechaniczne (kinematyczne i kinetyczne) mogą być definiowane tylko na podstawie ich wielkości, mogą również uwzględniać kierunek.

Zmienne, które mogą być reprezentowane przez liczbę (i jej jednostkę miary), nazywane są **skalarami**.

Przykładami zmiennych skalarnych i ich jednostek związanych z ruchem są masa (Kg), czas (s), zakres ruchu / kąt ( $^{\circ}$ ), moc (W), energia (J) i temperatura ( $^{\circ}\text{C}$ ).

Zmienne, które są reprezentowane zarówno przez skalary jak i związane z nimi kierunek, nazywane są **wektorami**.

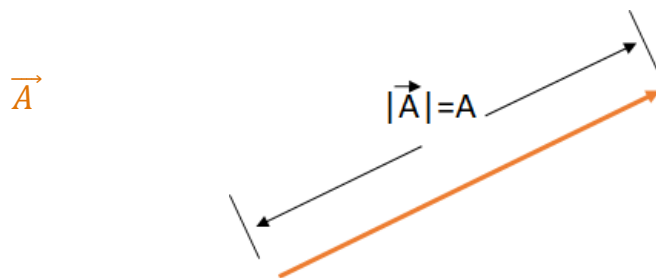
Przykładami zmiennych wektorowych związanych z ruchem są położenie, przemieszczenie, prędkość, przyspieszenie, siła i moment obrotowy / pęd.

Graficznie wektory są reprezentowane przez strzałkę.

#### 2.3.4.1. Właściwości wektora

Długość strzałki reprezentującej wektor jest proporcjonalna do wartości liczbowej tego wektora (oznaczonej przez  $|\vec{v}|$ ), a grot strzałki wskazuje kierunek i zwrot wektora (Rysunek 1).

Przykład:

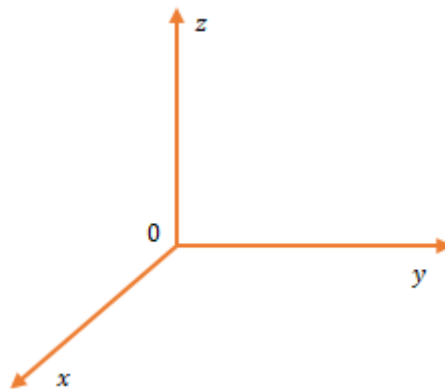


Wektory poddają się zasadom matematycznymi dotyczącym dodawania i mnożenia przez skalar (Tabela 1 and Tabela 2) [3].

Dodawanie wektorów			
Mnożenie wektorów przez skalar			
Prawo asocjacyjne dla iloczynu skalarnego	$b(c\vec{A}) = (bc)\vec{A} = (cb\vec{A}) = c(b\vec{A})$	Prawo rozdzielności dla dodawania wektorów	
Prawo rozdzielności dla iloczynu skalarnego		Tożsamość iloczynu skalarnego	$\vec{A} + (-\vec{A}) = \vec{0}$

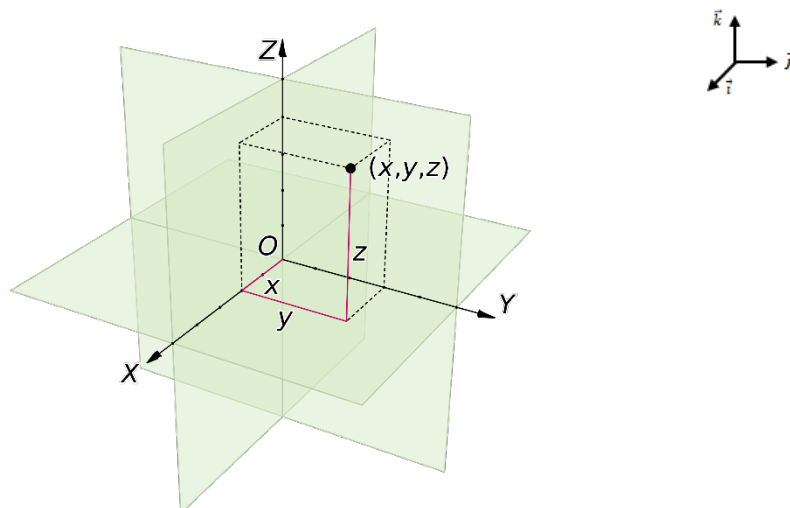
### 2.3.2. System współrzędnych

W każdej analizie biomechanicznej wymagany jest układ odniesienia. Pozwala on opisać jedno, dwu lub trójwymiarowe położenie badanego ciała. Typowym układem odniesienia stosowanym w biomechanice jest układ nazywany **kartezjańskim układem współrzędnych** (Rysunek 2). Składa się z zestawu wzajemnie prostopadłych osi, które spotykają się we wspólnym punkcie o początku 0.



W naszym świecie ruchy wykonywane są w przestrzeni 3D, dlatego ten układ współrzędnych posiada trzy osie, a nazwane są one następująco: oś x, oś y i oś z. Nie ma światowego standardu, który określałby, która oś odpowiada której literze (a także jej dodatni i ujemny kierunek). Należy je określić w sposób umowny.

Współrzędne punktu są zwykle zapisywane jako trzy liczby w nawiasach i oddzielone przecinkami  $(x,y,z)$ . Każdy układ współrzędnych posiada zestaw powiązanych wektorów unitarnych  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , które definiują kierunek każdej składowej wektora na osi x, y i z. Na Rysunku 3 przedstawiono punkt P, którego współrzędne w przestrzeni 3D wynoszą 2,3,4. Można również obserwować płaszczyzny utworzone przez dwie osie: płaszczyznę XY, płaszczyznę YZ i płaszczyznę XZ.





Rysunek SEQ Rysunek \\* ARABIC 3: Punkt (2, 3, 4) reprezentowany przez układ współrzędnych kartezjańskich.

Źródło: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coord\\_system\\_CA\\_0.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Coord_system_CA_0.svg)

Biorąc  $P = (2,3,4)$ , przejdźmy do wyodrębnienia przydatnych informacji:

Punkt P jest punktem w przestrzeni 3D, ponieważ wszystkie jego komponenty są różne od 0.

Składowa wektora na osi x = 2 w kierunku dodatnim.

Składowa wektora na osi y = 3 w kierunku dodatnim.

Składowa wektora na osi z = 4 w kierunku dodatnim.

Reprezentacja P jako wektora używając wektorów jednostkowych:

$$\vec{P} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$$

Wielkość  $|\vec{P}|$  można uzyskać z następującego wzoru:

$$|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

gdzie:

$P_x$  = Składowa P na osi x.

$P_y$  = Składowa P na osi y.

$P_z$  = Składowa P na osi z.

A zatem:

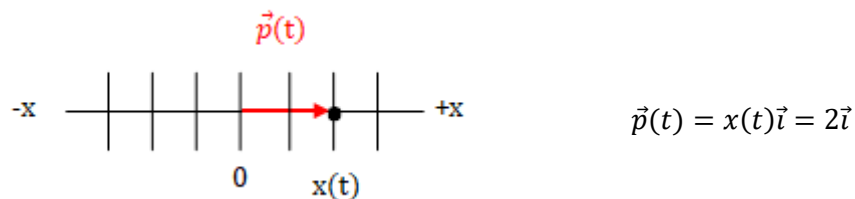
$$|\vec{P}|: \sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2} = 5.38$$

### 3. Podstawowe pojęcia ruchów liniowych: położenie, przemieszczenie, prędkość i przyspieszenie

#### 3.1 Podstawowe pojęcia ruchów liniowych w jednym wymiarze

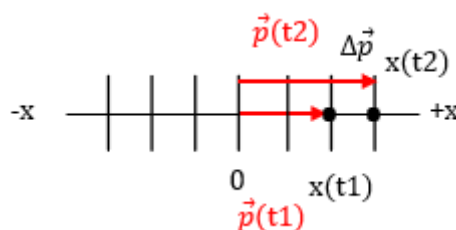
Ruch ciała implikuje zmianę położenia względem układu odniesienia (w tym przypadku kartezjańskiego układu współrzędnych). Zatem najpierw należy określić początkową pozycję tego ciała względem początku 0.

Rozważmy ciało poruszające się w jednym wymiarze (na osi x) jako funkcję czasu (t). Jego położenie początkowe jest określone przez **współrzedną położenia** i oznaczone przez  $x(t)$ . Ta współrzędna może być dodatnia lub ujemna, w zależności od tego, gdzie znajduje się ciało. Jak wskazano w poprzednim rozdziale, współrzędna położenia ma wielkość i kierunek, dlatego jest wektorem oznaczonym jako **wektor położenia** (Rysunek 4), a nazywa się po prostu wektorem [4].



Rysunek 4: Reprezentacja pozycji wektora w kartezjańskim układzie współrzędnych

Zmianę położenia ciała w przedziale czasu  $[t_1, t_2]$  nazywamy wektorem przemieszczenia (Rysunek 5). Przemieszczenie ciała w funkcji przedziału czasu jest różnicą wektorów między dwoma wektorami położenia w  $t_1$  i  $t_2$  [4].



$$\Delta \vec{p}(t) = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1) = (x(t_2) - x(t_1))\vec{i} = 3\vec{i} - 2\vec{i} = \vec{i}$$

\*w nauce symbol  $\Delta$  oznacza różnicę między dwiema wartościami lub szybkość zmian.

Powszechnie wiadomo, że prędkość jest wynikiem podzielenia odległości w czasie, ale otrzymana liczba bez określenia kierunku daje jedynie wyobrażenie o wielkości (skalarnej) nieużytecznej w biomechanice.

W fizyce **prędkość** to szybkość zmiany przemieszczenia. Szybkość ta wymaga znajomości kierunku prędkości (na osi), więc jest traktowana jako wektor.

Tak więc, biorąc pod uwagę przykład z rysunku 5, prędkość  $\vec{p}(t)$  w osi x można zapisać następująco:

$$v_{\vec{p}} = \frac{\Delta p(t)}{\Delta(t)} \vec{i}$$

To równanie definiuje **średnią prędkość** w przedziale czasu. Aby poznać **chwilową prędkość** w określonym czasie należy uwzględnić następujący wzór:

$$\vec{v}(t) = \frac{dp}{dt}$$

Prędkość chwilowa jest wg definicji wektorem będącym pochodną wektora położenia względem czasu.

Jednostką prędkości w systemie międzynarodowym (SI) to metr na sekundę  $\left[\frac{m}{s}\right]$ .

**Przyspieszenie** wyraża zmianę prędkości w czasie. Oznacza to, że w przypadku, gdy prędkość się nie zmienia (jest stała), przyspieszenie jest równe zero. Biorąc pod uwagę przykład z Rysunku 5, przyspieszenie  $\vec{p}(t)$  na osi x można wyrazić wzorem:

$$a_{\vec{p}} = \frac{\Delta v(t)}{\Delta(t)} \vec{i}$$

Według definicji matematycznej przyspieszenie jest wektorem wynikającym z pochodnej wektora prędkości lub drugiej pochodnej wektora położenia względem czasu.

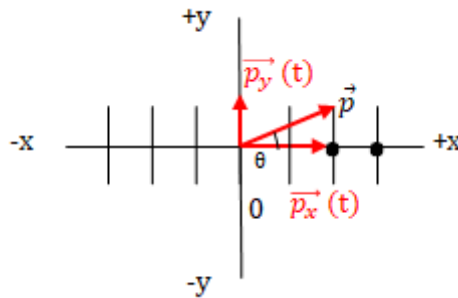
$$\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2p}{dt^2}$$

Jednostką przyspieszenia w układzie międzynarodowym (SI) jest metr na sekundę do kwadratu  $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ .

W przypadku, gdy przyspieszenie jest stałe, można zastosować następujące równania:

### 3.2 Podstawowe pojęcia w zakresie ruchów liniowych w więcej niż jednym wymiarze [5]

Aby opisać ruch ciała w dwóch lub trzech wymiarach, każdy wymiar należy rozpatrywać niezależnie. Rozważając  $\vec{p}(t)$  jako **wektor położenia** w dwóch wymiarach, można przedstawić go jako następującą reprezentację (Rysunek 6):



$$\vec{p}(t) = p_x(t)\vec{i} + p_y(t)\vec{j} = p\cos\theta\vec{i} + p\sin\theta\vec{j}$$

Położenie wektora analizuje się poprzez rozłożenie na jego składowe x, y i z. W tym przypadku  $p_x$  to komponent p na osi x, a  $p_y$  to komponent p na osi y.

W celu ułatwienia zdefiniowania ruchu w więcej niż jednym wymiarze, zostały uwzględnione równania określone dla jednego wymiaru:

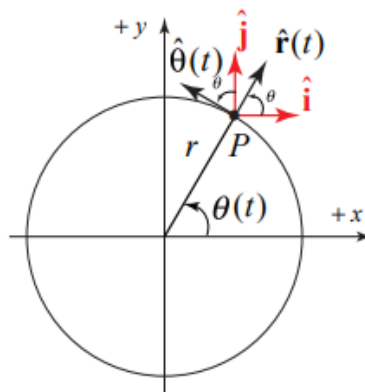
$$\begin{aligned} v_{\vec{p}} &= \frac{\Delta p_x(t)}{\Delta(t)}\vec{i} + \frac{\Delta p_y(t)}{\Delta(t)}\vec{j} & \vec{v}(t) &= \frac{dp_x}{dt} + \frac{dp_y}{dt} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} \\ a_{\vec{p}} &= \frac{\Delta v_x(t)}{\Delta(t)}\vec{i} + \frac{\Delta v_y(t)}{\Delta(t)}\vec{j} & \vec{a}(t) &= \frac{dv}{dt} = \frac{d^2p}{dt^2} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że w równaniach zastosowano znak dodatni, ponieważ wektory położenia, przemieszczenia, prędkości i przyspieszenia reprezentowane w jednym i dwóch wymiarach znajdują się na dodatniej osi x i y. Znak dodatni lub ujemny zależy od tego, gdzie wektory są położone.

## 4. Podstawowe pojęcia ruchów obrotowych: kąt, prędkość kątowa i przyspieszenie kątowe.

Ruchy obrotowe można zdefiniować w podobny sposób, jak ruchy liniowe.

Rozważmy punkt P, który porusza się ruchem obrotowym. Na Rysunku 7 opisano położenie P w pewnym momencie. Położenie wektora  $\vec{r}(t)$  i kąt  $\theta$  (przeszyczenie kątowe) określają, gdzie znajduje się punkt P względem osi x i osi y.



Dlatego równanie położenia wektora względem osi x jest zdefiniowane w następujący sposób:

$$\vec{r}(t) = \cos\theta(t)\vec{i} + \sin\theta(t)\vec{j}$$

**Prędkość kątowa ( $\omega$ )** jest równoważna prędkości liniowej w ruchach liniowych. Prędkość kątowa to wielkość opisująca szybkość zmiany kąta  $\theta$  względem czasu. A więc w odniesieniu do Rysunku 7 [8] prędkość kątową można opisać wzorem:

$$\omega = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Prędkość kątowa i liniowa są powiązane ze sobą poprzez promień (r):

$$\omega = \frac{v}{r}$$

Jednostką prędkości kątowej w układzie międzynarodowym (SI) jest metr na sekundę  $\left[\frac{\text{rad}^*}{\text{s}}\right]$ .

\* rad jest akronimem radianów

Zauważmy, że kąt i prędkość kątowa są wielkościami skalarnymi, a nie wektorami.

**Przyspieszenie kątowe ( $\alpha$ )** jest równoważne przyspieszeniu liniowemu w ruchach liniowych. Przyspieszenie kątowe jest wielkością opisującą szybkość zmiany prędkości kątowej  $\omega$  względem czasu. A więc w odniesieniu do Rysunku 7 [8] przyspieszenie kątowe można opisać wzorem:

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

Przyspieszenie kątowe (styczne) i liniowe są ze sobą powiązane promieniem ( $r$ ):

$$\alpha = \frac{a_t}{r}$$

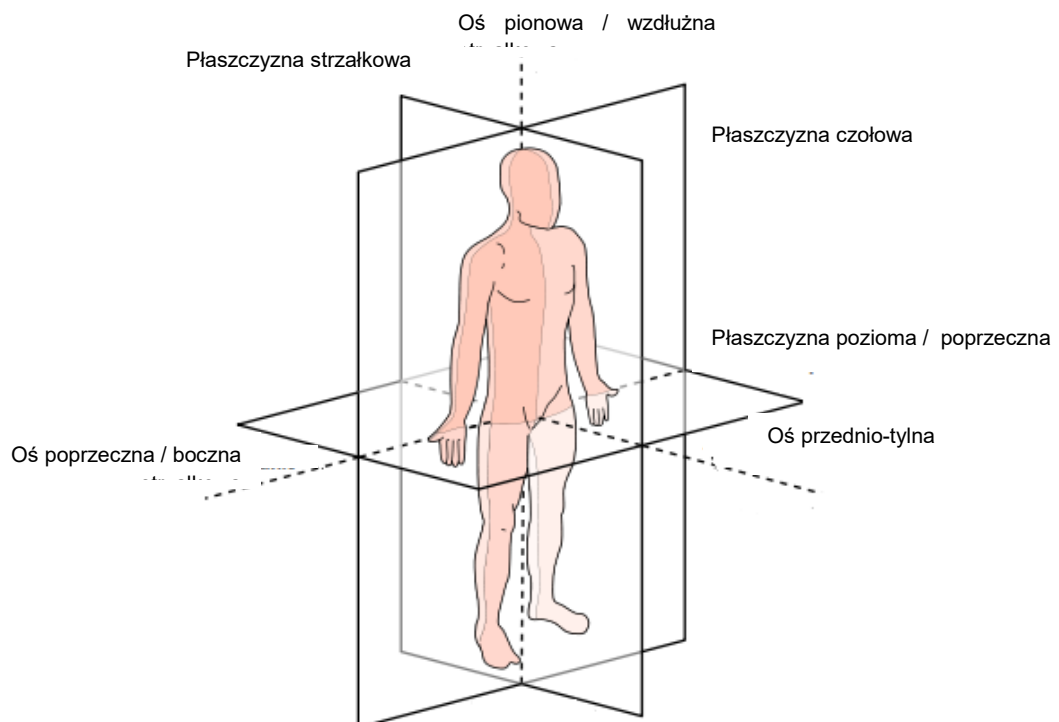
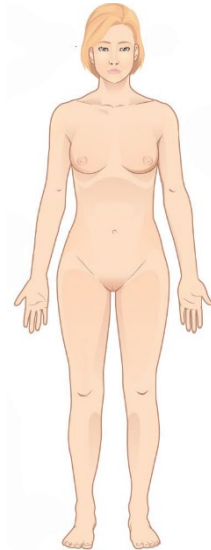
Jednostką przyspieszenia kątowego w systemie międzynarodowym (SI) jest metr na sekundę do kwadratu  $\left[\frac{rad}{s^2}\right]$ .

W przypadku, gdy przyspieszenie kątowe jest stałe, można zastosować następujące równania [8]:

$\theta$

## 5. Podstawy ruchu człowieka: płaszczyzny ruchu i kąty Eulera

Ruchy człowieka są wykonywane w trzech wymiarach, zatem do ich opisu wymagane są płaszczyzny ruchu w przestrzeni 3D. Płaszczyzny te są dopasowane do trzech osi przestrzennych: osi pionowej, wzdłużnej i bocznej. Aby zdefiniować te płaszczyzny, uwzględniono anatomiczne położenie ciała (Rysunek 8).



Rysunek 9: Osie i płaszczyzny wykorzystywane w ruchu człowieka

Źródło: [https://es.wikipedia.org/wiki/Plano\\_anat%C3%B3mico](https://es.wikipedia.org/wiki/Plano_anat%C3%B3mico) and modified by IBV

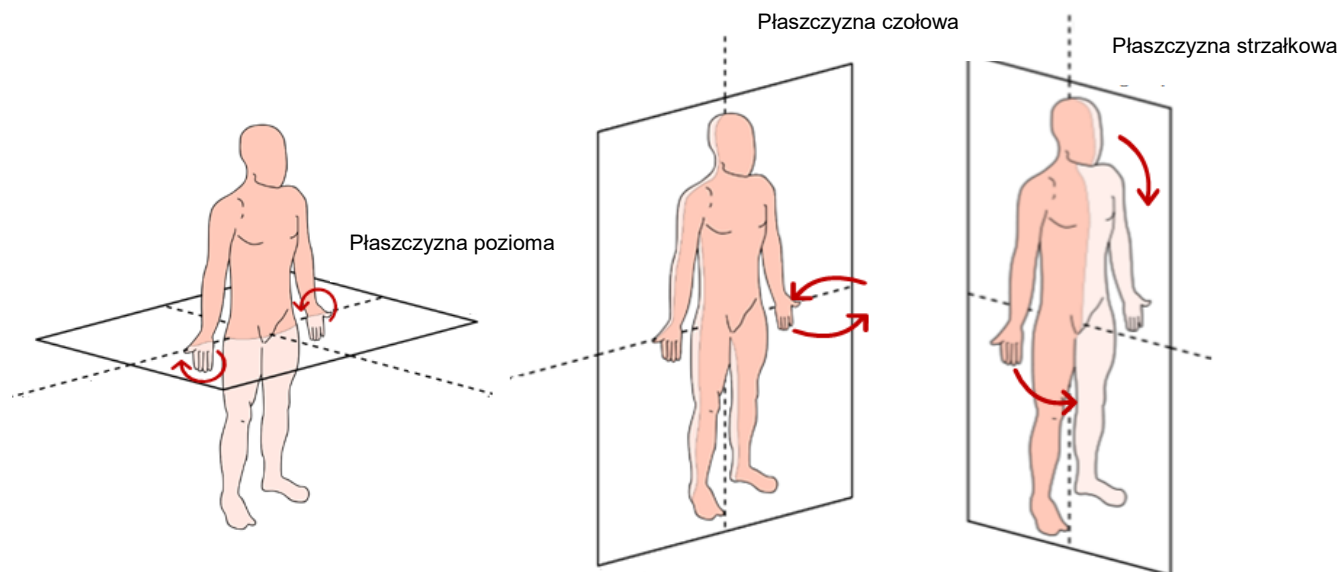


Na rysunku 10 opisano płaszczyzny ruchu. W każdej płaszczyźnie zdefiniowane są następujące ruchy:

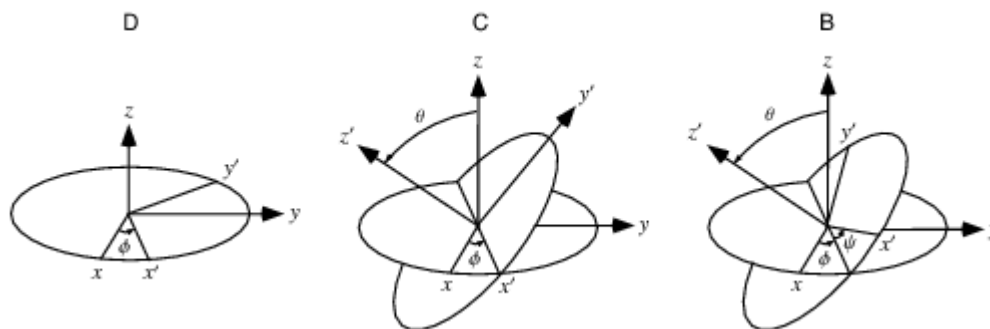
Płaszczyzna pozioma: ruchy obrotowe (Rysunek 10, po lewej)

Płaszczyzna czołowa: ruchy odwodzenia i przywodzenia (Rysunek 10, środek)

Płaszczyzna strzałkowa: ruchy zginania i prostowania (Rysunek 10, po prawej)



Aby opisać położenie dwóch poruszających się ciał, posłużmy się **metodą Eulera**. Zgodnie z tą metodą każdy obrót można opisać za pomocą trzech parametrów zwanych kątami Eulera. Zobaczmy przykład (Rysunek 11).



Kąty obrotu Eulera są umownie określone są przez  $(\Phi, \theta, \Psi)$ , gdzie [7]:

- Pierwszy obrót określa kąt  $\Phi$  wokół osi z za pomocą D (rysunek 11 po lewej).
- Drugi obrót określa kąt  $\theta$  w  $[0, \pi]$  wokół poprzedniej osi x (teraz x') przy użyciu C (Rysunek 11, środek).
- Trzeci obrót określa kąt  $\Psi$  wokół poprzedniej osi z (obecnie z') przy użyciu B (Rysunek 11, po prawej).

Różnica w stosunku do przytoczonych wcześniej kartezjańskich płaszczyzn współrzędnych (Rysunek 9) polega na tym, że początkowy układ odniesienia używany w metodzie Eulera może zmieniać się przy każdym obrocie, a zatem ruch odzwierciedlony jest w sposób bardziej przybliżony do świata rzeczywistego w porównaniu trzech wskazanych uprzednio płaszczyzn odniesienia.

Powodem, dla którego wyjaśniono istotę kątów Eulera, jest to, że są one bardzo ważne w ocenie klinicznej. Wcześniej zdefiniowane zostały płaszczyzny ruchu z uwzględnieniem anatomicznej pozycji ciała. W momencie, gdy staw zmienia swoje położenie w przestrzeni, ruchy zdefiniowane w płaszczyźnie również mogą ulec zmianie. Oznacza to, że np. Ruchy zginająco-prostujące należą do płaszczyzny strzałkowej ze względu na anatomiczne ułożenie ciała, ale nie oznacza to, że ruchy zginająco-prostujące są zawsze wykonywane w tej płaszczyźnie (będzie to zależało od początkowego położenia stawu) .

## 6. Bibliografia

---

Odnośniki są zgodne ze stylem IEEE. Kolejność wpisów jest zgodna z kolejnością pojawiania się w materiale [1].

[1] D.Knudson, fundamentals of Biomechanics. Cambrigde, 2007

[2] M. Nordin, V.H. Frankel, Basic biomechanics of the musculoskeletal system. Lippincott Williams & Wilkins, 2001.

[3] <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/index.htm>. Available in: [https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8\\_01F16\\_chapter3.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8_01F16_chapter3.pdf)

[4] <https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/index.htm>. [https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8\\_01F16\\_chapter4.2.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8_01F16_chapter4.2.pdf)

[5] [https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8\\_01F16\\_chapter5.1.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8_01F16_chapter5.1.pdf)

[6] [https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8\\_01F16\\_chapter6.2.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-01sc-classical-mechanics-fall-2016/readings/MIT8_01F16_chapter6.2.pdf)

[7] <http://mathworld.wolfram.com/EulerAngles.html>

[8] <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/rotq.html>



Wsparcie Komisji Europejskiej dla produkcji tej publikacji nie stanowi poparcia dla treści, które odzwierciedlają jedynie poglądy autorów, a Komisja nie może zostać pociągnięta do odpowiedzialności za jakiegokolwiek wykorzystanie informacji w niej zawartych.